Le funzioni polinomiali

Una classe di funzioni con particolari proprietà

1. Somma e prodotto di funzioni polinomiali

Vi sono alcune funzioni F per le quali è abbastanza facile sia prevedere l'andamento su tutto **R** che studiare quante sono le soluzioni dell'equazione F(x) =0. Abbiamo già visto le ***funzioni lineari***, $x \to a\,x + b$, aventi per grafico una *retta*:

- sono crescenti se $a > 0$ ($x \to 2x-3$), decrescenti se $a < 0$ ($x \to -3x+1$), costanti se $a = 0$ ($x \to 5$)
- l'equazione F(x) = 0 con F lineare ha 1 soluzione (se $a \ne 0$), 0 soluzioni o tutti i numeri come soluzioni (se anche $b = 0$).

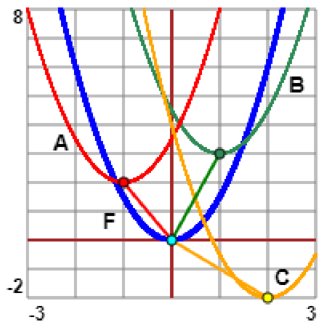
Abbiamo visto pure le funzioni $x \to a\,x^2 + b\,x + c$ che, *se* $a \ne 0$, vengono dette ***funzioni quadratiche***. Hanno per grafico una *parabola* ottenibile *traslando* il grafico di $x \to ax^2$. Infatti con i passi $\Delta x=\mathbf{h}$ e $\Delta y=\mathbf{k}$ ottengo il grafico di $x \to \boldsymbol{a}\mathbf{(x-h)^2+k} = a(x^2-2hx+h^2)+k = ax^2-2ahx+ah^2+k$. Basta che $-2ah = b$ e $ah^2+k = c$, ovvero che $h = -b/(2a)$, $k = c-ah^2 = c-b^2/(4a)$

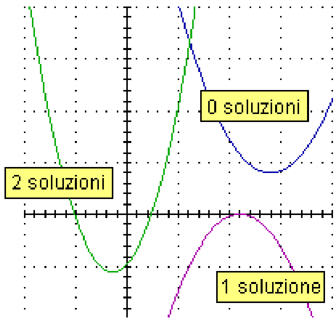
1 A lato sono tracciati il grafico di F: $x \to 1.5\cdot x^2$ e quelli di 3 funzioni, A, B e C.

(1) Associa ad A e B la corrispondente espressione scelta fra le seguenti.

$x \to F(x-1)+3$ $\quad x \to F(x+1)+3$ $\quad x \to F(x+1)+2$ $\quad x \to F(x-1)-2$

(2) Esplicita una funzione che abbia per grafico C.





Le funzioni $x \to a\,x^2 + b\,x + c$

- se $a > 0$ (parabola con la concavità verso l'*alto*) sono decrescenti in un intervallo $(-\infty,h]$ e crescenti in $[h,\infty)$; se $a < 0$ (parabola con la concavità verso il *basso*) sono crescenti in un intervallo $(-\infty, h]$ e decrescenti in $[h, \infty)$;
- l'equazione F(x)=0, se F è una funzione di questo genere, ha 0 soluzioni, 1 soluzione o 2 soluzioni.

Più in generale considero le funzioni $x \to a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ con $a_n \ne 0$. Una funzione F di questo tipo è chiamata ***funzione polinomiale*** *di grado* ***n***; a_i viene chiamato ***coefficiente*** di grado ***i*** ed a_n *coefficiente* ***direttivo***. L'equazione F(x)=0 viene chiamata ***equazione polinomiale*** di grado *n*.

Un termine dalla forma $a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots a_2 x^2 + a_1 x + a_0$ viene chiamato ***polinomio in x*** *di grado* ***n***, anche se i coefficienti non sono costanti, ma variabili o termini più complessi (purché non contenenti x); i termini di grado inferiore ad *n* possono, in parte o tutti, essere anche assenti.

Come la parola *poligono* deriva dalle parole greche *polís* (molto) e *gonia* (angolo), a mo' di "figura dai molti angoli", così la parola *polinomio* deriva dalle parole greche *polís* e *ónoma* (nome, espressione), a mo' di "espressione costituita dalla somma di molte espressioni". Si parla anche di ***trinomio***, ***binomio*** e ***monomio*** per indicare un polinomio che è somma di 3, 2 o 1 termine, cioè in cui solo 3, 2 o 1 tra gli a_i sono diversi da 0.

Per *n*=0 si ha il caso particolare delle *funzioni* ***costanti***. La *funzione nulla*, $x \to 0$, è costante ma non rientra nella definizione data poiché $a_n = a_0 = 0$; è considerata una funzione polinomiale senza grado o, a volte, di grado –1.

Per *n*=1 abbiamo il caso delle *funzioni lineari non costanti* e per *n*=2 quello delle *funzioni quadratiche*. Le funzioni polinomiali di grado 3 sono chiamate *funzioni* ***cubiche***.

Ad esempio la funzione $V(x) = (20-2x)^2x$ è cubica; infatti:

$$(20-2x)(20-2x)x = (20(20-2x)-2x(20-2x))x = (400-40x-40x+4x^2)x = 4x^3-80x^2+400x.$$

2 Che grado ha il seguente polinomio in x? $\quad 5\,x + 4\,y^4 + x^2 - x^3$

E il seguente polinomio in k? $\quad \sqrt{2}\,k - 4\,x^2 + 3$

Tutte le funzioni polinomiali sono ***continue***.

Il ***prodotto*** *di due funzioni polinomiali*, una di grado *m*, l'altra di grado *n*, è una *funzione polinomiale* di grado *m*+*n*. Infatti:

se F: $x \to a_m x^m + \ldots$ e G: $x \to b_n x^n + \ldots$ sono le due funzioni, *sviluppando* il prodotto F(x)·G(x), raggruppando i termini e, poi, riordinandoli, si ottiene: $a_m \cdot b_n x^{m+n} + \ldots$ come nell'es. seguente:

$(3x^2 - x/2 + 2)(7x^3 - x) = 3x^2(7x^3 - x) - x/2(7x^3 - x) + 2(7x^3 - x) =$
$21x^5 - 3x^3 - (7x^4/2 - x^2/2) + 14x^3 - 2x = 21x^5 - 3x^3 - 7x^4/2 + x^2/2 + 14x^3 - 2x =$
$21x^5 - 7x^4/2 + (14-3)x^3 + x^2/2 - 2x = 21x^5 - 3.5x^4 + 11x^3 + 0.5x^2 - 2x$

È un calcolo un po' noioso. Rifacciamolo con uno script per **moltiplicare polinomi**:

h5	0	h4	0	h3	0	h2	3	h1	-0.5	h0	2
k5	0	k4	0	k3	7	k2	0	k1	-1	k0	0

X Canc

p10	0	p9	0	p8	0	p7	0	p6	0	p5	21
p4	-3.5	p3	11	p2	0.5	p1	-2	p0	0		

Nota. Date due funzioni F e G a input e output numerici, la *funzione somma* **F+G** è così definita: (F+G)(x) = F(x)+G(x). Analogamente si definiscono **F·G**, **F–G** e **F/G**.

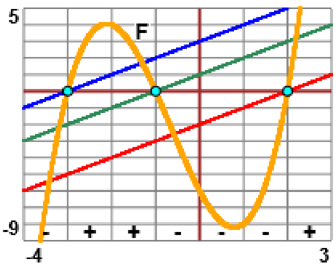
$\boxed{3}$ La *somma* di due funzioni polinomiali è una funzione polinomiale (basta raggruppare i termini che contengono la variabile elevata allo stesso esponente). Che cosa puoi concludere sul suo *grado*?
[prima di provare a rispondere somma due a due, in vari modi, $2x^3+1$, $4x^2-6.7$, $-2x^3+x$]

Sia **F** la funzione polinomiale di 3° grado $x \to (x+3)(x+1)(x-2)$ [$= x^3+2x^2-5x-6$]. Per schizzarne a mano il grafico posso procedere in questo modo:
• osservo che F(x) si annulla per $x=-3$, $x=-1$ e $x=2$ (il grafico *taglia* l'asse x in *punti* con tali ascisse);
• schizzo il grafico delle tre funzioni lineari **g**, **h** e **k** di cui si è fatto il prodotto, che passano per questi punti;
• osservo che per $x<-3$ le 3 funzioni hanno valori negativi, con prodotto negativo, e che, quindi, per $x<-3$ il grafico deve stare sotto all'asse x;
• osservo che per $-3<x<-1$ una delle funzioni diventa positiva, per cui il prodotto cambia segno, e quindi, il grafico scavalca l'asse x;
• analogamente, passando all'intervallo $(-1,2)$ e, poi, all'intervallo $(2,\infty)$, man mano un'altra funzione cambia segno, per cui cambia segno il prodotto e si hanno due altri successivi scavalcamenti dell'asse x.

$\boxed{4}$ A lato è tracciato il grafico di **F**: $x \to (x+3)(x+1)(x-2)$ discusso sopra.

(1) Schizza il grafico di $x \to$ **F**(x)/2. Quante sono le soluzioni di **F**(x)/2=0?

(2) Schizza il grafico di $x \to$ **F**(x)/2−3. Quante sono le soluzioni di **F**(x)/2−3=0?



In analogia a quanto si è visto per le equazioni di 2° grado, quelle di 3° grado hanno **al più** 3 soluzioni e, più in generale, le *equazioni di grado* n *hanno al più* n *soluzioni.* Su ciò ritorneremo.

2. Divisione di funzioni polinomiali

Osserva in *figura 1* il grafico della funzione F: $x \to (x^2-2x-3)/(x+1)$ ottenuto col computer. Ha un andamento rettilineo, cioè F si comporta come una funzione lineare. Troviamo qual è questa funzione calcolando la *pendenza* del grafico e l'*intercetta*, cioè l'ordinata del punto in cui interseca l'asse y. Dal grafico si trova facilmente che la pendenza è 1 e che l'intercetta è −3, per cui la funzione lineare cercata è $x \to x-3$. Sembra, quindi, che $(x^2-2x-3)/(x+1)$ sia algebricamente equivalente a $x-3$. In altre parole, qualunque valore si assegni a x, dovrebbe essere vera l'equazione $(x^2-2x-3)/(x+1) = x-3$, ovvero dovrebbe essere vera l'equazione $(x-3)(x+1) = x^2-2x-3$. Verifichiamolo.

"Sviluppando" $(x-3)(x+1)$ e, poi, raggruppando i termini della somma così ottenuta si ha:
$\mathbf{(x-3)(x+1)} = x(x+1)+(-3)(x+1) = x\cdot x+x\cdot 1+(-3)x+(-3)\cdot 1 = x^2+x+(-3)x+(-3)\cdot 1 = x^2+(1-3)x-3 = \mathbf{x^2-2x-3}$

[in genere molti di questi passaggi vengono eseguiti a mente e si scrive più in breve:

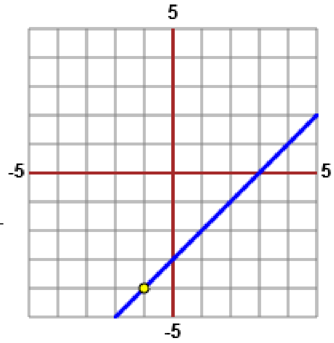
$$(x-3)(x+1) = x(x+1)-3(x+1) = x^2+x-3x-3 = x^2-2x-3\ ]$$

Non possiamo però concludere che $(x^2-2x-3)/(x+1)$ è equivalente a $x-3$ in quanto per $x=-1$ il primo termine non è definito: otterrei una divisione per 0. In altre parole la funzione F iniziale è equivalente alla funzione $x \to x-3$ se restringiamo il dominio di quest'ultima imponendo la condizione $x\neq-1$. Ovvero:

$$y = (x^2-2x-3)/(x+1) \Longleftrightarrow (y = x-3 \ \ \mathit{AND} \ \ x \neq 1)$$

La traduzione "geometrica" di ciò è che il grafico di F non è una retta, ma una retta "bucata": è la figura che si ottiene dalla retta $y=x-3$ togliendone il punto di ascissa −1.

figura 1



$x \to \frac{x^2-2x-3}{x+1}$

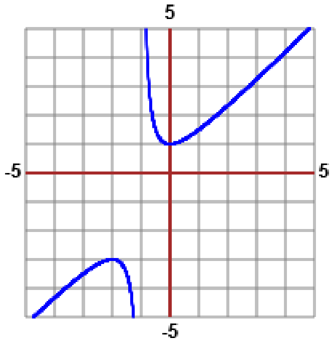


figura 2

$x \to \frac{x^2+x+1}{x+1}$

Consideriamo ora G: $x \to (x^2+x+1)/(x+1)$. Il termine G(x), come F(x), è il rapporto tra un polinomio in x di 2° grado e uno di 1° grado. Ma G non ha come F un grafico rettilineo: rappresentandone il grafico col computer otteniamo *figura 2.* Non è più una retta bucata.

Anzi, man mano che x si avvicina a −1 il grafico si allontana sempre più dall'asse x, o verso l'alto (se ci si avvicina a −1 da destra) o verso il basso (se ci si avvicina da sinistra).

Ciò significa che non esiste una funzione lineare H (cioè una funzione polinomiale di 1° grado) tale che, per ogni $x \neq -1$, sia vero che: $(x^2+x+1)/(x+1) = H(x)$.

Potrei capire che i rapporti F(x) e G(x) sono uno equivalente (dove è definito) ad un polinomio e l'altro no senza ricorrere ai grafici? Di fronte ai rapporti 1875/3 e 2875/3 come possiamo stabilire se sono equivalenti a ***numeri interi***? Una strada semplice è eseguire la *divisione.* Con la CT nel primo caso ottengo 625, nel secondo 958.333…; "a mano" si usa un algoritmo che procede per tentativi "ragionati":

- nel calcolo della divisione di un numero **A** per un altro numero **B** ($B \le A$) cerco di ricondurmi alla divisione per **B** di **numeri** man mano più piccoli, fino ad arrivare a 0 o a un numero comunque inferiore a B;

```
(1)                 (2)                 (3)                 (4)
 2875 | 3            2875 | 3            2875 | 3            2875 | 3
      |___                |___           2700 |___          -2700 |___
      |                   | 900               | 900         ----- | 900
                                                              175

(5)                 (6)                 (7)                 (8)
 2875 | 3            2875 | 3            2875 | 3             900
-2700 |___          -2700 |___          -2700 |___             50
----- | 900         ----- | 900         ----- | 900             8
  175    50           175    50           175    50           ---
                     -150                -150     8           958
                     ----                ----
                       25                  25                con resto 1
                                          -24
                                          ---
                                            1
```

- nel caso della divisione di un polinomio **A(x)** per un polinomio **B(x)** (di grado inferiore o uguale) cercherò di ricondurmi alla divisione per **B(x)** di **polinomi** di grado man mano minore, fino ad arrivare al polinomio nullo o a un polinomio di grado inferiore rispetto a B(x):

```
(1)     4x² - x - 3      | x + 1               x² - 2x - 3      | x + 1
                         |____                                   |____
                         |                                       |

(2)     4x² - x - 3      | x + 1               x² - 2x - 3      | x + 1
                         |____                                   |____
                         | 4x                                    | x

(3)     4x² -  x - 3     | x + 1               x² - 2x - 3      | x + 1
        4x² + 4x         |____                 x²  +  x          |____
                         | 4x                                    | x

(4)     4x² -  x - 3     | x + 1               x² - 2x - 3      | x + 1
      -(4x² + 4x)        |____               -(x²  +  x)         |____
      -----------        | 4x                -----------         | x
           -5x - 3                                - 3x - 3

(5)     4x² -  x - 3     | x + 1               x² - 2x - 3      | x + 1
      -(4x² + 4x)        |____               -(x²  +  x)         |____
      -----------        | 4x                -----------         | x
           -5x - 3         -5                     - 3x - 3         -3
         -(-5x - 5)                             -(- 3x - 3)
      -----------                            -----------
                2                                      0
```

$$\frac{4x^2 - x - 3}{x + 1} \to 4x - 5 + \frac{2}{x + 1} \qquad\qquad \frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1} \to x - 3$$

Nell'esempio illustrato sotto il procedimento si conclude più rapidamente rispetto ai primi due esempi. Infatti come primo resto ottengo 1, che ha grado inferiore a x+1, per cui mi devo fermare al primo passo.

```
   x² + x + 1   | x + 1
 -(x² + x)      |____
 -----------    | x
            1
```

$$\frac{x^2 + x + 1}{x + 1} \to x + \frac{1}{x + 1}$$

Il concetto di *divisione* nel caso dei numeri e dei polinomi è sostanzialmente lo stesso; si tratta dell'*operazione inversa della moltiplicazione.*.

- Calcolare 2875/3 vuol dire trovare Q tale che Q · 3 = 2875; se ci si limita ad operare nei numeri naturali si tratta di trovare il numero Q tale che Q · 3 + R = 2875 con R<3.
- Calcolare $(x^2+x+1)/(x+1)$ vuol dire trovare il polinomio Q(x) tale che $Q(x) \cdot (x+1) = x^2+x+1$ o, almeno, $Q(x) \cdot (x+1) + R(x) = x^2+x+1$ con R(x) polinomio di grado inferiore rispetto a x+1; questo caso include il precedente, prendendo R(x)=0 (polinomio nullo).

Q sta per ***quoziente***, **R** per ***resto***. Nel caso degli esempi visti sopra abbiamo:

(1) $2875 = 958 \cdot 3 + 1$ (2) $4x^2 - x - 3 = (4x - 5) \cdot (x + 1) + 2$

(3) $x^2 - 2x - 3 = (x - 3) \cdot (x + 1)$ (4) $x^2 + x + 1 = x \cdot (x + 1) + 1$

Ma questa analogia tra numeri e polinomi vale fino a un certo punto:

- il fatto che la divisione 16/2 ha 8 come risultato "esatto", cioè con resto nullo, ci consente di dire che 16/2 è uguale ad 8,
- invece *il fatto che la divisione di* $x^2–2x–3$ *per* x+1 *ha come risultato* x–3 *con resto nullo* ***non*** *ci consente di concludere che il termine a lato* ***equivale*** *a* x–3:

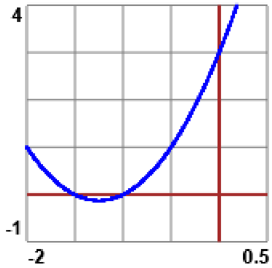
$$\frac{x^2 - 2x - 3}{x + 1}$$

il termine x–3 è definito per ogni x mentre il termine $(x^2–2x–3)/(x+1)$ non è definito per x = –1.

3. Teorema del resto e soluzioni delle equazioni polinomiali

Anche senza tracciare il grafico di $x \to x^2–2x–3$, poiché ho visto che ➜ $x^2–2x–3$ è ***fattorizzabile*** come (x+1)(x–3), posso concludere che esso *interseca l'asse x* per x=–1 e x=3. Infatti:

(x–3)(x+1) = 0 equivale a x–3 = 0 OR x+1 = 0 e quindi a x = 3 OR x = –1.



Viceversa, se so che la funzione polinomiale x → A(x) ha grafico che interseca l'asse x per x=*h*, cioè se so che A(*h*)=0, posso concludere che A(x) è divisibile esattamente per x–*h*?

Ad es. a lato è tracciato il grafico di $x \to H(x) = 2x^2+5x+3$. Esso interseca l'asse x in due punti che hanno ascissa –1 e –1.5 rispettivamente. Posso concludere che H(x) è fattorizzabile come (x–(–1))·(…), cioè come (x+1)·(…)? Ovvero come (x–(–1.5))·(…), cioè come (x+1.5)·(…)?

La risposta è affermativa, infatti vale la seguente proprietà, nota come ***teorema del resto*** (o ***di Ruffini***):

la divisione di A(x) per x – h ha come resto il numero A(h)

La *dimostrazione* di ciò è facile.

Se Q(x) e R sono il quoziente e il resto della divisione di A(x) per x–*h*:

A(x) / (x-h) = Q(x) + R / (x-h), ovvero: A(x) = Q(x)(x–*h*) + R.

Quindi, per x=*h*, A(*h*) = Q(*h*)(*h*–*h*) + R = 0+R = R

Come immediata conseguenza del teorema del resto, abbiamo che:

se A(h) = 0 il polinomio A(x) è divisibile esattamente per x – h

Nel caso dell'esempio precedente ($2x^2+5x+3$, che si annulla per x = –1 e per x = –3) abbiamo effettivamente che $2x^2+5x+3$ si divide esattamente per x+1, e dà 2x+3; ovvero che si divide esattamente per x+1.5 e dà 2x+2. D'altra parte $(x+1)(2x+3) = 2x^2+5x+3$ e $(x+1.5)(2x+2) = 2x^2+5x+3$ [si noti che: (2x+3) = 2(x+1.5) e che (2x+2) = 2(x+1)].

$\boxed{5}$ Senza eseguire la divisione, stabilisci quali tra i seguenti polinomi sono divisibili esattamente per x−3 e quali per x+2:
$5x^2 - 5x - 30$ $2.1x^2 + 8.4x + 6.3$ $x^3 + 0.5x^2 - 10.5x$ $5x + 10$

$\boxed{6}$ Siano F: $x \to (x^2-5x+6)/(x-2)$, G: $x \to (x^2-5x+6)/(x+2)$. Per ciascuna di esse stabilisci, usando il teorema del resto, se il grafico è o no una retta "bucata". In caso affermativo trova l'equazione della retta e le coordinate del "buco".

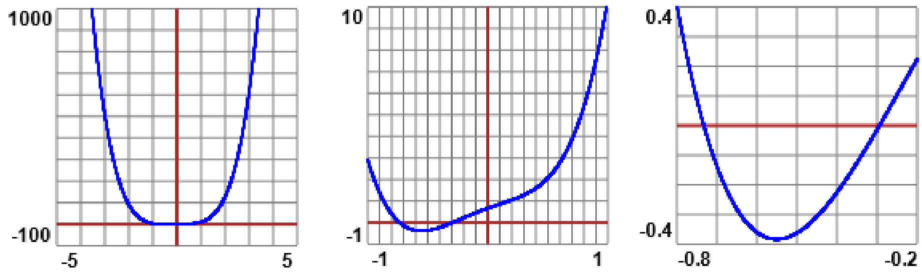
Il teorema del resto ci consente di concludere che, se un'equazione polinomiale ha, ad esempio, 5 soluzioni *a*, *b*, *c*, *d* ed *e*, il polinomio è ***divisibile*** [sottointeso "*esattamente*"] per (x–*a*), (x–*b*), (x–*c*), (x–*d*) e (x–*e*) e, quindi, è equivalente a (x–*a*)(x–*b*)(x–*c*)(x–*d*)(x–*e*)·**…** . Il polinomio deve, perciò, essere almeno di 5° grado. Un'equazione polinomiale di 4° grado, quindi, ha al più 4 soluzioni: se ne avesse 5 dovrebbe essere di grado maggiore di 4.

In generale possiamo concludere (come preannunciato alla fine di §1) che:

una equazione polinomiale di grado* n *ha al più* n *soluzioni

Questo risultato, assieme al fatto che le funzioni polinomiali sono continue, ci consente di risolvere facilmente, in modo approssimato, le equazioni polinomiali con vari tipi di software. Vediamo ad esempio come studiare $7x^4 + \sqrt{3}x^3 - x^2 + 2x + 2/3 = 0$.

- Ad es. con lo script **Grafici** posso ottenere:



Il grafico, a parte qualche serpentina interna, deve avere una forma ad **U**. Infatti per x che cresce oltre ogni limite T(x) sale oltre ogni limite (in breve, diciamo che per $x \to \infty$ anche $T(x) \to \infty$): il valore di x^4 tende a superare quello di tutte le altre potenze di x ad esponente inferiore; analogamente, essendo 4 un numero pari, anche per "$x \to -\infty$" abbiamo che "$T(x) \to \infty$". Le due soluzioni individuate graficamente sopra (≈ -0.7, ≈ -0.3) sono tutte le soluzioni. Possiamo trovarne velocemente molte cifre con il procedimento per risolvere le equazioni polinomiali, **eq.polinomiale**, già considerato in una scheda precedente:

− se non si ricorre alle immagini grafiche, si può usare lo script per "testare" la funzione con a=-5, b=5, ..., a=-0.8, b=0.2:

```
(-0.8, -0.7, -0.6, -0,5, -0.4, -0.3, -0.2, -0.1, 0, 0.1, 0.2)
0.40705665319 -0.13672676033 -0.36025630777 -0.36233968428 -0.22498458502 -0.01339870514 0.22401026021
0.45563461586 0.66666666667 0.85909871747 1.05172307313
```

− cliccando più volte, partendo da a= -0.8, b= -0.6 e da a= -0.6, b= 0.2, si ottengono le soluzioni:

```
-0.732580963760389   -0.294220933458897
```

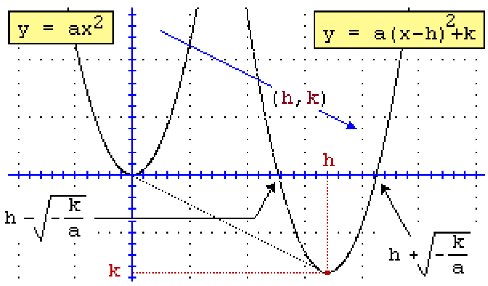
Posso concludere che il nostro polinomio equivale al prodotto di un polinomio di 2° grado non scomponibile (e quindi che corrisponde ad un grafico che sta tutto sopra o tutto sotto all'asse x) per due polinomi di 1° grado, che corrispondono alle due soluzioni i cui valori (approssimati) sono −0.732581 e −0.294221.

7 Prova a risolvere, sia "a mano" che usando alcuni dei software considerati sopra, l'equazione $x^3-x^2=0$.

Per le ***equazioni polinomiali di 2° grado*** esistono varie tecniche che consentono di trovare facilmente le soluzioni, vediamone alcune, riferite all'equazione $\mathbf{3x^2+2x-5=0}$

• la prima sfrutta l'eguaglianza $(\mathbf{a}+\mathbf{b})^2 = \mathbf{a}^2+\mathbf{b}^2+2\mathbf{ab}$ per trasformare $x^2+\ldots x$ in $(x+\ldots)^2$:
$3x^2+2x-5=0 \to x^2+2/3x-5/3=0$ $[x^2+2/3x \to (x+1/3)^2-(1/3)^2]$ $\to (x+1/3)^2-1/9-5/3=0 \to (x+1/3)^2-16/9=0 \to$
$x+1/3=\pm\sqrt{(16/9)} \to x=-1/3\pm 4/3 \to x=3/3=1$ OR $x=-5/3$
in altre parole si ***completa il quadrato*** $x^2+2/3x$ aggiungendo $(1/3)^2$ in modo da trasformarlo in $(x+1/3)^2$, da cui poi deve essere tolto il termine aggiunto.

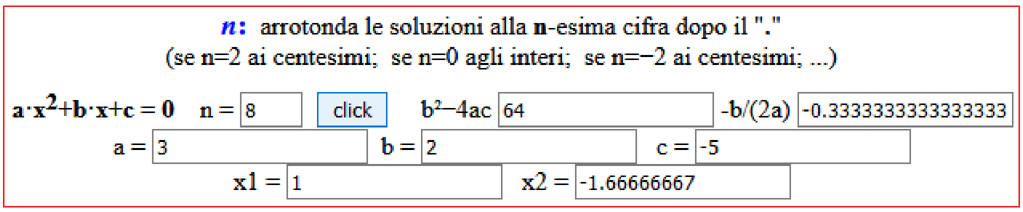
• la seconda si riferisce al considerare $y=ax^2+bx+c$ traslazione di $y=ax^2$ del vettore (h,k), come già fatto in ➡ §1. Dalle espressioni di **h** [–b/(2a)] e **k** [c–b²/(4a)] si possono ricavare le espressioni delle eventuali soluzioni dell'equazione, infatti:
$a(x-h)^2+k=0 \;\to\; (x-h)^2=-k/a \;\to\; x-h=\pm\sqrt{(-k/a)}$
$\to\; \mathbf{x} \;=\; h\pm\sqrt{(-k/a)} \;=\; \mathbf{-b/(2a)\pm\sqrt{(b^2-4ac)}/(2a)}$
nel nostro caso $x=-2/6\pm\sqrt{(4+60)}/6=-1/3\pm 4/3$, ossia $x=1$ OR $x=-5/3$.



Come ➡ già visto, non è detto che ci siano soluzioni o ce ne può essere una sola. Ciò corrisponde ai casi in cui, sotto radice, abbiamo b^2-4ac negativo o uguale a 0.

8 Risolvi le seguenti equazioni di 2° grado "a mano" e/o col computer.
$3x^2+2x-5=0$ rispetto ad x, $k^2+(\sqrt{8}-\sqrt{2})k+4=0$ rispetto a k, $(h-A)^2=0$ rispetto ad A.

C'è uno sript che automatizza questi calcoli (e quelli per risolvere altre semplici equazioni), in cui viene chiesto all'utente anche di indicare con quale precisione avere le soluzioni: **sempliciEq**. Ecco che cosa si può ottenere per l'equazione precedente:



9 Risolvi usando questo script l'equazione $21x^2-26x+8=0$ con 15 cifre. Prova quindi a trasformare le soluzioni in forma frazionaria (questo è uno dei rari casi in cui è possibile farlo).

Il teorema del resto e l'algoritmo della divisione sono utilizzabili per realizzare ***fattorizzazioni*** di termini polinomiali.

Ad esempio $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$ può essere pensato come polinomio di 2° grado in **a**, cioè come P: $\mathbf{a} \to \mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$. Osservo che $P(\mathbf{b}) = \mathbf{b}^2-\mathbf{b}^2 = 0$. Per il teorema del resto $\mathbf{a}^2-\mathbf{b}^2$ è divisibile per $\mathbf{a}-\mathbf{b}$.

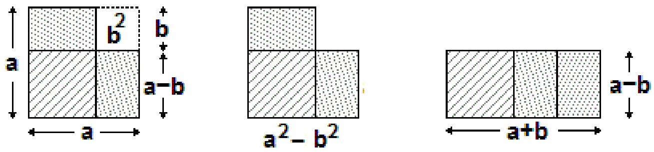
Eseguo la divisione, tenendo conto che sto operando con polinomi in **a**: devo quindi scrivere i risultati intermedi (resti, …), usando eventuali riordini e raggruppamenti, così che appaiano come polinomi in **a**.

```
 a²         - b²  | a - b
-(a²  - ba)       | a
                    b
      ba  - b²
    -(ba  - b²)
            0
```

Il quoziente è **a** + **b** e quindi:

$$\mathbf{a}^2 - \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} - \mathbf{b})(\mathbf{a} + \mathbf{b})$$

Questa e altre *scomposizioni* (e gli *sviluppi* / *espansioni* che si ottengono leggendo alla rovescia le equazioni: lo sviluppo di (a-b)(a+b) è …) sono ricavabili anche interpretando la moltiplicazione come prodotto di lunghezze:



10 Spiega geometricamente, in modo simile a quanto fatto sopra, $\mathbf{a}^2 + 2\mathbf{ab} + \mathbf{b}^2 = (\mathbf{a} + \mathbf{b})^2$

Un po' di parole: gli sviluppi di $(a+b)^2$ e di $a^2–b^2$ richiamati sopra (e altri sviluppi analoghi - vedi qualche esempio negli "esercizi") un tempo erano chiamati *prodotti notevoli*. Il primo è spesso chiamato *quadrato del binomio*.

4. Massimo comune divisore e minimo comune multiplo

Continuiamo l'analogia tra interi e polinomi.

Se voglio ***semplificare*** la frazione 12 / 198 posso procedere per tentativi:
− vedere se entrambi i termini sono divisibili per 2, e ottenere 6/99;
− vedere se i nuovi termini sono ancora divisibili per 2 (no, in questo caso) e/o per 3, e ottenere 2/33.

Complessivamente, ho diviso entrambi i termini per 6 (2·3 = 6): 6 è il massimo numero intero per cui sono entrambi divisibili (con resto nullo), cioè 6 è il ***massimo comune divisore*** di 12 e 198 [m.c.d.(12, 198) = 6].

Di fronte a 187 / 408 non è altrettanto semplice procedere per tentativi e ottenere 11/24. La nuova frazione si può ottenere dividendo entrambi i termini per 17.

Ci si pone, allora, il problema di trovare direttamente 17, cioè il m.c.d. dei due termini della frazione. Vi sono vari **script** che consentono di procedere in vari modi.

Con **divisori** per 187 e 408 ottengo i seguenti divisori da cui immediatamente ricavo che 17 è il massimo in comune:
1 2 3 4 6 8 12 17 24 34 51 68 102 136 204 408   1 11 17 187

Con **semplifica/mcd** se metto in input 187/408 ottengo:

M/N   M 187   N 408   simplify

```
187;408 => 17      187/408 -> 11/24
```

Vediamo un modo semplice per ottenere a mano il m.c.d. tra 187 e 408. L'idea è interpretare questo numero come il massimo numero per cui è semplificabile il rapporto 408/187, e cercare di semplificare tale rapporto riconducendomi man mano a rapporti tra numeri più piccoli. 408/187 ha quoziente 2 e resto 34 (187·2=374, 408–374=34); quindi 408/187 è trasformabile in 2 + 34/187; mi riconduco alla semplificazione di 34/187, ovvero di 187/34, di cui trovo quoziente e resto, … e così via fino a che ottengo una divisione esatta, cioè con resto nullo:

$\frac{408}{187} = 2 + \frac{34}{187}$ $\frac{187}{34} = 5 + \frac{17}{34}$ $\frac{34}{\mathbf{17}} = 2$

Q=2 R=34   Q=5 R=17   Q=2 R=0

17 è il massimo numero naturale per cui sono divisibili sia 34 che 17, e, quindi, sia 187 che 34, e, quindi, sia 408 che 187: 17 = m.c.d.(408, 187).

Questo procedimento è noto come ***algoritmo delle divisioni successive***, o come *algoritmo* ***euclideo*** (dal nome del matematico greco del 3° sec. a.C. Euclide, che descrive tale metodo in uno dei suoi scritti).

11 Trova il m.c.d. tra 2431 e 884 sia con l'agoritmo euclideo che con gli script precedenti.

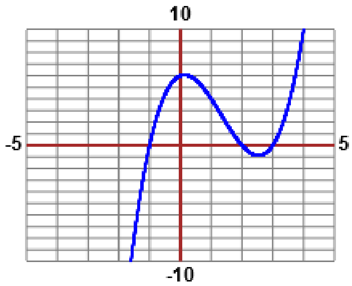
Usando **sempliciEq** posso fattorizzare i polinomi $3x^2−9x+6$ e $0.2x^2−x+1.2$ ottenendo 3(x-2)(x-1) e 0.2(x-3)(x-2). Capisco che il loro ***massimo comune divisore***, ossia il polinomio di *grado massimo* per cui entrambi sono divisibili esattamente, è **x−2**. In realtà ogni polinomio del tipo k·(x−2) con k≠0 è divisore di entrambi. Scegliamo quello con coefficiente direttivo 1, ossia x−2, come "rappresentante" di tutti.

Puoi trovare il massimo comune divisore degli stessi polinomi usando l'*algoritmo euclideo.* Nella sezione *esercizi* della scheda è suggerito come farlo.

Proponiamoci ora di *semplificare* $(3x^2−9x+6) / (0.2x^2−x+1.2)$. In base alle uscite precedenti posso trasformare questo rapporto nella forma 3(x−2)(x−1) / **(**0.2(x−3)(x−2)**)** e quindi semplificare, dividendo primo e secondo termine del rapporto per **x−2**, in 3(x−1) / **(**0.2(x−3)**)**. Tenendo conto che 3/0.2 = 15 ho, dunque:

$$(3x^2−9x+6) / (0.2x^2−x+1.2) = 15(x−1) / (x−3)$$

Si noti, comunque, che pur essendo vera questa equazione, ***non*** posso concludere che il termine a sinistra e quello a destra di "=" ***sono algebricamente equivalenti*** in quanto il primo di essi non è definito per x=2.



12 Trova il m.c.d. tra $x^2 + x - 6$ e $x^3 - 4x^2 + x + 6$ (scomponi il primo con **semplici Eq**; per il secondo osserva il relativo grafico, qui a sinistra

Vediamo ora come semplificare la somma di rapporti tra polinomi. Anche in questo caso partiamo dall'esempio dei numeri interi. Consideriamo la somma di alcuni rapporti tra interi. Eseguiamo i calcoli con lo **script** **opFraz** (i risultati in forma decimale sarebbero 0.65, 0.48333…, −0.35):

```
2/5 + 1/4 -> 13/20   1/15 + 5/12 -> 29/60   1/15 - 5/12 -> -7/20
```

A mano si userebbe la trasformazione a lato: ***a/b + c/d → (a·d + c·b)/(b·d)***

ed eventualmente una semplificazione: 1/15 + 5/12 → (1·12+5·15)/(15·12) → (1·4+5·5)/(5·12) → 29/60 [ho diviso sia il primo che il secondo termine per 3].

13 Sviluppa in modo simile 1/15 − 5/12.

A volte può essere utile cercare di "semplificare" preventivamente il termine finale prendendo al posto di ***b·d*** il più piccolo multiplo comune a ***b*** e a ***d***. Ad es. nel secondo caso considerato sopra, osservando che 15·**4** = 60 e 12·**5** = 60 (60 è il *minimo multiplo comune* a 15, i cui multipli sono 15, 30, 45, 60, 75…, e 12, i cui multipli sono 12, 24, 36, 48, 60, 72, …) avrei potuto fare:

1/15 + 5/12 → (1·4 + 5·5) / 60 → 29/60

[per inciso ricordiamo che alcuni dicono anche che 60 è il *minimo comune denominatore* tra 1/15 e 5/12, intendendo il numero più piccolo che è multiplo comune dei denominatori di 1/15 e 5/12: nel caso del rapporto tra interi il divisore viene chiamato anche "denominatore" in quanto, se si legge 5/12 come "5 dodiciesimi", 12 dà il nome alle parti; 5 è il "numeratore" poichè esprime il numero delle parti]

Per cercare il m.c.m. tra due numeri questo metodo (elencare i multipli dell'uno e dell'altro fino a trovarne uno comune) è il più semplice, ma non è sempre il più efficiente. Nel caso di 187 e 408, per ottenere il m.c.m. 4488, dovrei generare parecchi multipli; con un computer a disposizione la cosa sarebbe semplice, ma non comoda:

- 187 374 561 748 935 1122 1309 1496 1683 1870 2057 2244 2431 2618 2805 2992 3179 3366 3553 3740 3927 4114 4301 **4488**
- 408 816 1224 1632 2040 2448 2856 3264 3672 4080 **4488**

Vediamo un metodo alternativo. Ricordiamo che con **semplifica/mcd** se metto in input 187/408 ottengo:

M/N M 187 N 408 simplify

```
187;408 => 17      187/408 -> 11/24
```

14 Osserva il calcolo seguente, cerca di individuare tale metodo e usalo per trovare il m.c.m. tra 1722 e 1804.

```
187*408/17 = 4488
```

15 Racchiudi con un riquadro il termine che corrisponde al metodo illustrato nel quesito precedente.

m.c.m.(x, y) =

x / y / m.c.d.(x, y) **x · y / m.c.d.(x, y)** **x / y · m.c.d.(x, y)**

In maniera analoga definisco ***minimo comune multiplo*** di *polinomio1* e *polinomio2* un polinomio del grado più basso possibile che sia "multiplo" di entrambi, cioè che sia divisibile esattamente sia per *polinomio1* che per *polinomio2*. Come nel caso del m.c.d., il m.c.m. non è unico; prendiamo come rappresentante quello avente 1 come coefficiente direttivo.

La ricerca del m.c.m. può essere utile nei casi in cui sia necessario trasformare la somma del rapporto tra due polinomi in un unico rapporto.

16 Sotto è riportata una tale trasformazione. Completala, utilizzando i calcoli sotto riportati. [***tranquillo***: calcoli del genere non ti capiterà mai di affrontarli nella vita, anche se facessi lo scienziato; sono solo presenti in qualche buffo libro di testo]

$$\frac{x + 1}{x^3 - 8x^2 + 19x - 12} + \frac{11x}{2x^2 - 5x - 3} \to \frac{11x^3 - 53x^2 + 47x + \ldots}{\ldots x^4 - 15x^3 + 30x^2 - 5x - 12}$$

```
(x+1)/(x^3-8x^2+19x-12) -> (1+x)/((-4+x)(-3+x)(-1+x))
           11x/(2x^2-5x-3) -> 11x/((-3+x)(1+2x))
  (-4+x)(-3+x)(-1+x)(1+2x) -> 2x^4-15x^3+30x^2-5x-12
(x+1)(1+2x)+11x(-4+x)(-1+x) -> 11x^3-53x^2+47x+1
```

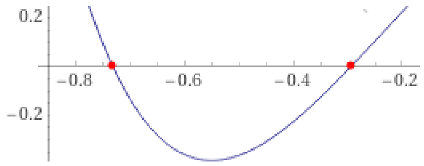
ovvero:

```
   (x+1)/(x^3-8x^2+19x-12)+(11x)/(2x^2-5x-3)
->  (11x^3-53x^2+47x+1)/((x-4)(x-3)(x-1)(2x+1))
```

Questi strambi esercizi possono comunque essere affrontati usando del software gratuito, come *WolframAlpha*, che useremo spesso più avanti. Se cliccato www.WolframAlpha.com introduci **simplify** (x+1)/(x^3-8*x^2+19*x-12)+(11*x)/(2*x^2-5*x-3) ottieni (11*x^3-53*x^2+47*x+1)/((x-4)*(x-3)*(x-1)*(2*x+1)). Se poi introduci **expand** (x-4)*(x-3)*(x-1)*(2*x+1) ottieni 2*x^4-15*x^3+30*x^2-5*x-12. Introducendo **LCM** (x^3-8x^2+19x-12, 2x^2-5x-3) ottieni the "least common multiple" 2*x^4-15*x^3+30*x^2-5*x-12. Anche le soluzioni delle equazioni polinomiali posso trovarle con WolframAlpha; per quella risolta in precedenza con "eq.polinomiale" con **solve** 7*x^4+sqrt(3)*x^3-x^2+2*x+2/3=0 **for x real** ottengo:

$x \approx -0.73258096376038944108$

$x \approx -0.29422093345889692752$



Anche su questo comando ci soffermeremo in seguito.

17 Trasforma in frazione la somma di frazioni a lato raccogliendo x a fattor comune nel 1° demominatore e riscrivendo il 2° denominatore mediante l'equivalenza tra $\mathbf{a^2-b^2}$ e $\mathbf{(a+b)(a-b)}$

$$\frac{3x + 1}{x^2 - \sqrt{2}x} + \frac{1 - x}{x^2 - 2}$$

5. Esercizi

e1 Scrivi una funzione il cui grafico intersechi l'asse x esattamente per $x=-3$, $x=0$, $x=1$ e $x=5$.

e2 Trova le soluzioni di $2x^2-3x+1=0$, $x^2+0.2x+0.01=0$, $3x^2-x+0.1=0$.

e3 A volte possono essere utili i seguenti "prodotti notevoli":

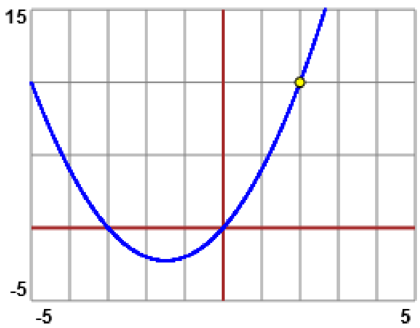
$$\mathbf{a^3-b^3 = (a-b)(a^2+ab+b^2)} \text{ e } \mathbf{a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2)}.$$

Pensando $\mathbf{a^3-b^3}$ e $\mathbf{a^3+b^3}$ come polinomi in **a**, verifica, col teorema del resto che essi sono divisibili esattamente per, rispettivamente, **a−b** e **a+b**, e controlla le precedenti eguaglianze eseguendo le divisioni o svolgendo i prodotti.

e4 Sotto è tracciato il grafico della funzione **f** ottenuto con lo script **Grafici** con i comandi seguenti.

```
function f(x) { y = (x*x*x + x*x - 6*x)/(x-2); return y }
aX = -5; bX = 5; aY = -5; bY = 15
Dx = 1; Dy = 5
// Con Qx=[a,b,..]; Qy=[A,B,..] traccio punti gialli
Qx=[2]; Qy=[f(2-0.001)]
```

Che cosa rappresenta il punto giallo? Come è stato tracciato? Che forma ha il grafico di **f**? Perché?



e5 Con **questo** script tracci il grafico di **f**: x → (2*x^3+5*x^2-8*x-20)/(x-3). Posso trovare un punto di ascissa 3 tale da renedere il grafico di **f** "continuo" come quello che si ottiene nel caso dell'esercizio precedente con il punto (2,10)?

e6 Con **questo** script tracci il grafico di **f**: x → (x+1)/(x*x-7*x+4). Qual è il dominio di questa funzione?

e7 Usando opportunamente la riscrittura $\mathbf{(a-b)(a+b) \to (a^2-b^2)}$, sviluppa i seguenti termini in modo da ottenere dei termini polinomiali (in x e in z rispettivamente).

$$(x-1)(x+2)(x+1)(x-2) \qquad (z^3-5)(z+2)(z^3+5)$$

e8 Trova, usando opportuni script, il massimo comune divisore e il minimo comune multiplo di 45 e 99, di 56 e 44, di 396 e 528, di 114 e 171, di 1024 e 3584.

e9 Dati $(x^3+x^2-6x)/(x-2)$, $(2x^3+5x^2-8x-20)/(x-3)$, $(x+1)/(x^2-7x+4)$,
per ciascuno di essi stabilisci, usando il teorema del resto (dopo eventuali fattorizzazioni "immediate"), se sono "semplificabili". In caso affermativo trova il nuovo termine e specifica per quali valori di x è equivalente al termine iniziale. Se ti è di aiuto, confronta le tue soluzioni tracciando, uno per volta, i loro grafici.

e10 (approfondimento) Per ciascun termine frazionario considerto nel quesito precedente trova il m.c.d. e il m.c.m. (con coefficiente direttivo 1) tra il polinomio a numeratore e quello a denominatore (nel modo che ritieni più semplice).

e11 (approfondimento) Trova m.c.d. e m.c.m. (con coefficiente direttivo 1) tra le seguenti coppie di polinomi [usa le tracce].

x^2-4 e x^2-5x+6	[osserva che x^2-4 è scomponibile in … e usa il teorema del resto in modo opportuno sull'altro polinomio]
x^2-6x+5 e x^2-6x+8	[che relazione c'è tra i grafici di $x \to x^2-6x+5$ e di $x \to x^2-6x+8$? possono avere in comune intersezioni con l'asse x? possono essere entrambi divisibili per uno stesso polinomio di 1° grado?]
x^3-2x^2+x-2 e x^3-2x^2+x+1	[utilizza l'algoritmo euclideo]

e11 (approfondimento) Utilizzando l'ultima risposta al quesito precedente, stabilisci se le figure di equazione $y = x^2-6x+5$ e $y = x^2-6x+8$ hanno in comune intersezioni con l'asse x. Verifica la risposta graficamente.

e12 (approfondimento) Trasforma in frazione $x/(2x^2-16x+30) + (2-x)/(3x^2-30x+63)$ [prima di fare altri calcoli vedi se puoi raccogliere a fattor comune degli atomi nei vari polinomi; controlla la risposta tracciando opportuni i grafici in funzione di x del termine originale e del trasformato]

e13 (approfondimento) Risolvi rispetto ad x $x/(2x^2-16x+30) + (2-x)/(3x^2-30x+63) = 1$

1) Segna con l'evidenziatore, nelle parti della scheda indicate, frasi e/o formule che descrivono il significato dei seguenti termini:
funzione polinomiale (§1),   *coefficiente direttivo* (§1),   *teorema del resto* (§3),   *massimo comune divisore tra polinomi* (§4),   *minimo comune multiplo tra polinomi* (§4).

2) Su un foglio da "quadernone", nella prima facciata, esemplifica l'uso di ciascuno dei concetti sopra elencati mediante una frase in cui esso venga impiegato.

3) Nella seconda facciata riassumi in modo discorsivo (senza formule, come in una descrizione "al telefono") il contenuto della scheda (non fare un elenco di argomenti, ma cerca di far capire il "filo del discorso").